



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL COMAHUE
Centro Regional Universitario Bariloche
Año Académico: 2015

ASIGNATURA: Teoría de Grafos

DEPARTAMENTO: Matemáticas

ÁREA: Análisis

ORIENTACIÓN:

CARRERA: Licenciatura en MATEMATICAS

PLAN DE ESTUDIOS N°: 187/98, MODIF. N°: 0290/09

CARGA HORARIA SEMANAL: 8 horas

RÉGIMEN: (*anual, cuatrimestral, bimestral, trimestral*) **Cuatrimstral**

CUATRIMESTRE: (*primero o segundo*) **Primero**

OPTATIVA

EQUIPO DE CATEDRA (*Completo*):

Apellido y Nombres

Dr. Sebastián Risau Gusman

Cargo.

ADJ1

AsD e/c. 3.

ASIGNATURAS CORRELATIVAS (*S/Plan de Estudios*):

- **PARA CURSAR:** Cálculo II, Algebra lineal (cursado aprobado)
- **PARA RENDIR EXAMEN FINAL:** Cálculo II, Algebra lineal, Probabilidad y Estadística (final aprobado)

1. FUNDAMENTACION:

Los grafos, como representación de relaciones entre entidades, están presentes en una gran cantidad de aplicaciones en los campos más diversos, desde la teoría de grupos hasta la bioinformática y la física estadística, pasando por la economía y el análisis logístico. Si bien la teoría de grafos, como rama de la matemática, ha sido sistematizada recién en los últimos 150 años, es en la actualidad una de las áreas más populares de investigación en matemática discreta.

2. OBJETIVOS – PROPOSITOS:

El objetivo de la materia es que los alumnos se familiaricen con los conceptos, métodos y teoremas más importantes de la teoría clásica de grafos, así como también con desarrollos teóricos más recientes, como la teoría de grafos aleatorios. Se busca también que sean capaces de entender y analizar los diversos algoritmos relacionados, y sobre todo que sean capaces de comprender los detalles del análisis de la complejidad computacional de un algoritmo y sus implicancias.

3. CONTENIDOS SEGÚN PLAN DE ESTUDIOS:

Introducción. Isomorfismo de grafos y estructura. Árboles. Conectividad. Caminos y recorridos. Redes y flujos. Complejidad Computacional. Matchings e independencia. Planaridad. Coloreados. Grafos aleatorios. Procesos dinámicos sobre grafos. Enumeración de grafos.

4. CONTENIDO PROGRAMA ANALÍTICO: *(Detallar los Temas que se desarrollan en los Trabajos Prácticos)*

Introducción: Repaso histórico. Definiciones. Ejemplos de problemas mapeables a grafos. Familias de grafos especiales. Grafos bipartitos. Propiedades. Digrafos. Propiedades. Digrafos transitivos y torneos. Grafos ponderados y aplicaciones. Relación entre grafos y matrices (adyacencia, incidencia, laplaciana).

Isomorfismo de grafos y estructura: isomorfismo como relación de equivalencia. Orbitas. Conteo de grafos e isomorfismos. Automorfismos y grupos. Aplicación a familias especiales de grafos. Subgrafos. Subgrafos abarcadores (spanning) e inducidos. Descomposición en ciclos. Generación de grafos a partir de otros (uniones, productos, potencias). Eliminación de nodos y aristas. Conjetura de la reconstrucción gráfica.

Árboles: Bosques, hojas, raíces y branchings. Árboles de expansión (spanning trees). Propiedades. Problema del árbol de expansión mínimo. Algoritmos de búsqueda en árboles. Búsquedas en anchura (breadth) y en profundidad (depth). Análisis preliminar de algoritmos.

Conectividad: Vértices de corte. Aristas de corte. Diferencias. Bloques. Grafos no separables. K-conectividad. Conectividad de digrafos. Teorema de Menger. Contracciones y expansiones de grafos triconectados. Distancias. Algoritmo de Dijkstra.

Caminos y recorridos. Repaso histórico. Problema de Euler. Recorridos de Euler. Condiciones de existencia. Algoritmo de Fleury. Grafos eulerianos. Recorridos hamiltonianos. Problema del viajante de comercio. Condiciones suficientes de existencia (teorema de Dirac). Grafos hamiltonianos. Extensión a digrafos (teorema de Redei). Aplicación: Grafos de de Bruijn y reconstrucción de una secuencia de ADN a partir de fragmentos. Diferencias entre algoritmos para recorridos eulerianos y hamiltonianos.

Redes y flujos: Grafos ponderados como redes de transporte. Flujos. Ejemplos. Teorema del flujo máximo-corte mínimo (max flow-min cut). Algoritmo de Ford-Fulkerson. Casos donde diverge. Corrección de Edmonds. Flujos y teorema de Menger.

Complejidad Computacional: Algoritmos y máquinas de Turing. Equivalencias entre modelos de computación. Notación $o(N)$ y $O(N)$. Problemas como lenguajes decididos o aceptados por máquinas de Turing. Categorización de lenguajes/problemas. Tiempo versus espacio de computación. Relaciones entre categorías. Reducción de un problema a otro. Reducciones polinomiales. Ejemplo: HAMILTONIAN PATH a SAT. Completitud. Problemas NP completos. Teorema de Cook. Problemas NP-completos en teoría de grafos.

Matchings e independencia: Matching en grafos bipartitos. Aplicaciones. Teorema de Hall. Algoritmo Blossom. Aplicación: Determinación del estado fundamental de un vidrio de espín. Recubrimiento de vértices. Numeros de independencia y recubrimiento. Número de clique. Teorema de Turán. Teorema de Ramsey. Número de Ramsey.

Planaridad: Definición. Diferencias topológicas entre embeddings. Unicidad de los embeddings para grafos triconectados. Grafos simples no planares. Subdivisiones de grafos. Teorema de Kuratowski. Embeddings en superficies de genus arbitrario. Fórmula de Euler generalizada. Menores de grafos.

Coloreados: Coloreados de vértices. Repaso histórico. Aplicaciones a scheduling. Teorema de los 5 colores. Cadenas de Kempe. Problema de los 4 colores y falla del método de Kempe. Reducibilidad. Coloreado de aristas y teorema de Vizing. Número cromático. Teorema de Brooks. Grafos de cintura y numero cromático arbitrariamente grandes. Demostración de Erdős con el método probabilístico.

Grafos aleatorios: Método probabilístico. Modelos y ensembles. Grafos aleatorios regulares. Variables aleatorias. Desigualdades de Markov y de Chebishev. Funciones umbral. Estructura de grafos aleatorios. Aparición de la componente gigante. Tamaños de las componentes menores. Conectividad. Tamaño de ciclos y caminos. Generación de grafos con secuencia de grado fija. Modelos de configuración y de Chung-Lu. Formalismo de función generatriz para grafos.

Procesos dinámicos sobre grafos: Redes complejas. Grafos small world y libres de escala. Propiedades. Epidemias y umbrales. Campo medio y métodos exactos. Caminantes. Teoría de juegos en grafos.

Enumeración de grafos: Conteo de grafos. Fórmula de Cayley para árboles. Conteo de grafos no isomorfos. Método de función generatriz. Lema de Burnside. Índice de ciclos y su polinomio. Sustitución de Polya.

5. BIBLIOGRAFÍA CONSULTA:

TITULO: *A First Course in Graph Theory.*
AUTOR (ES): Chartrand, G y Zhang, P..
EDITORIAL: Dover
EDICION: 2012
BIBLIOTECA: NO

TITULO: *Graph Theory*
AUTOR (ES): Bondy, J.A. y Murty, U.S.R.
EDITORIAL: Springer
EDICION: 2008
BIBLIOTECA: NO

TITULO: *Graph Theory and its Applications*
AUTOR (ES): Gross, J.L. y Yellen J.
EDITORIAL: CRC Press
EDICION: 2005
BIBLIOTECA: NO

TITULO: *Computational Complexity*
AUTOR (ES): Papadimitriou, C
EDITORIAL: Addison-Wesley
EDICION: 1993
BIBLIOTECA: NO

TITULO: *Random Graphs*
AUTOR (ES): B. Bollobás
EDITORIAL: Cambridge University Press
EDICION: 2001
BIBLIOTECA: NO

6. PROPUESTA METODOLOGICA:

La materia consistirá de 8 horas semanales de clase, divididas en dos días de 4 horas. Cada día habrá 2 horas de clase teórica, y 2 horas de práctica. En esta última se resolverán problemas de las guías entregadas a los estudiantes (una por unidad), y se hará hincapié en la participación de los mismos.

7. EVALUACIÓN Y CONDICIONES DE ACREDITACION:

ALUMNOS REGULARES:

La evaluación, para aprobar la cursada, consistirá de dos exámenes parciales. Si el grupo es lo suficientemente reducido como para evaluar individualmente la performance de los alumnos, se prescindirá de los exámenes parciales. La aprobación final de la materia será con un examen final. Este consistirá en la exposición oral de un tema relacionado: puede ser un artículo de investigación sobre teoría de grafos, o la demostración detallada de teoremas esbozados en clase, o la exposición detallada de algún algoritmo y el análisis de su complejidad.

ALUMNOS PROMOCIONALES: El alumno que obtenga una nota igual o superior a 80 sobre 100 en cada examen parcial, tendrá la oportunidad de promocionar la materia, para lo cual deberá rendir un coloquio al finalizar el cursado.

ALUMNOS LIBRES: Para rendir libre la materia el alumno deberá aprobar un examen de 9 problemas. La aprobación implica la resolución de al menos el 70 % del examen y luego un coloquio.

8. DISTRIBUCIÓN HORARIA:

HORAS TEORICOS: Lunes y Miércoles, 14:00 a 16:00 hs.

HORAS PRACTICOS: Lunes y Miércoles, 16:00 a 18:00 hs.

9. CRONOGRAMA TENTATIVO:

- Semana 1:** Introducción.
- Semana 2:** Isomorfismo de grafos y estructura..
- Semana 3:** Árboles.
- Semana 4:** Conectividad.
- Semana 5:** Caminos y recorridos.
- Semana 6:** Redes y flujos.
- Semana 7:** PRIMER PARCIAL
- Semana 8:** RECUPERATORIO, Matchings e independencia..
- Semana 9:** Enumeración de grafos.
- Semana 10:** Planaridad.
- Semana 11:** Coloreados.
- Semana 12:** Grafos aleatorios.
- Semana 13:** Procesos dinámicos sobre grafos.
- Semana 14:** Repaso y SEGUNDO PARCIAL.
- Semana 15:** Consulta, y RECUPERATORIO.


PROFESOR


CONFORMIDAD DIRECTOR/DELEGADO
DEPARTAMENTO

Mónica de Torres Curth
Laboratorio Ecotono - Dpto. de Matemática
Centro Regional Universitario Bariloche
Universidad Nacional del Comahue


Lic. MARIA INES SANCHEZ
Secretaria Académica
CONFORMIDAD SECRETARIA ACADEMICA
Universidad Nacional del Comahue
CENTRO REGIONAL UNIVERSITARIO BARILOCHE